ROBABILITÉS

Questions inaugurales

1

Non corrigé.

Éventualités

2

a) 11

b) $6\times6 = 36$

c) 21

d) Une infinité

3

a) 4

b) $2\times2\times2 = 8$

4

a) 2

b) 5

c) 4

d) 3

e) 25

f) 20

g) 10

Événement

5

$\Omega=\{1;...;4\}\times\{1;...;4\}=\{1;...;4\}^2$

Ainsi posé, Ω est l'ensemble des couples dont les termes sont 1 ; 2 ; 3 ou 4. Par exemple, $(3;2)$ est un élément de l'univers Ω.

$A=\{\ (2;3)\ \}$

$B=\{\ (2;3)\ ;\ (3;2)\ \}$

$C=\{\ (1;1)\ ;\ (2;2)\ ;\ (3;3)\ ;\ (4;4)\ \}$

$D=\{\ (4;1)\ ;\ (4;4)\ ;\ (4;2)\ ;\ (4;3)\ \}$

6

$\Omega=\{P;F\}\times\{P;F\}\times\{P;F\}=\{P;F\}^3$

Ainsi posé, Ω est l'ensemble des triplets dont les termes sont P ou F. Par exemple, $(P;F;P)$ est un élément de l'univers Ω.

$A=\{\ (P;F;F)\ \}$

$B=\{\ (P;P;P)\ ;\ (F;F;F)\ \}$

$C=\{\ (P;F;F)\ ;\ (F;P;F)\ ;\ (F;F;P)\ \}$

$D=\{\ (P;F;F)\ ;\ (P;P;P)\ ;\ (P;F;P)\ ;\ (P;P;F)\ \}$

Probabilité d'un événement

7

a) 1/2

b) 1/6 ; 1/6 ; 1/3

c) 2/5

Équiprobabilité

8

a) Oui

b) Non

c) Non

d) Oui

e) Non

f) Oui

g) Non

9

$\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$

$A=\{\ 6\ \}$; $B=\{\ 1\ ;3\ ;5\ \}$

Puisqu'il y a équiprobabilité :

$$P(A)=\frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

$$P(B)=\frac{\text{Card B}}{\text{Card } \Omega}=\frac{3}{6}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

10

$\Omega=\{B_1;B_2;N_1;N_2;N_3\}$

$E=\{B_1;B_2\}$

Puisqu'il y a équiprobabilité : $P(E)=\dfrac{Card(E)}{Card(\Omega)}=\boxed{\dfrac{2}{5}}$

11

$$\begin{aligned}\Omega &= \{B_1;B_2;N_1;N_2;N_3\}\times\{B_1;B_2;N_1;N_2;N_3\}\\ &= \{B_1;B_2;N_1;N_2;N_3\}^2\end{aligned}$$

Autrement dit, Ω est l'ensemble de tous les couple dont les termes sont pris dans l'ensemble $\{B_1;B_2;N_1;N_2;N_3\}$.

$E=\{N_1;N_2;N_3\}^2$

Puisqu'il y a équiprobabilité : $P(E)=\dfrac{Card(E)}{Card(\Omega)}=\dfrac{3\times 3}{5\times 5}$

12

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\ (P;P)\ ;\ (P;F)\ ;\ (F;P)\ ;\ (F;F)\ \}\\ &= \{P;F\}\times\{P;F\}\\ &= \{P;F\}^2\end{aligned}$$

$A=\{\ (P;P)\ \}$; Donc, puisqu'on est en situation d'équiprobabilité : $P(A)=\dfrac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}=\boxed{\dfrac{1}{4}}$

$B=\{\ (P;P)\ ;\ (F;F)\ \}$; $P(B)=\dfrac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega}=\dfrac{2}{4}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$

$C=\{\ (P;P)\ ;\ (P;F)\ ;\ (F;P)\ \}$; $P(C)=\dfrac{\text{Card } C}{\text{Card } \Omega}=\boxed{\dfrac{6}{4}}$

13

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1;2;3;4;5;6\}\times\{1;2;3;4;5;6\}\\ &= \{1;2;3;4;5;6\}^2\end{aligned}$$

$A=\{\ (1;2)\ \}$; Donc, puisqu'on est en situation d'équiprobabilité : $P(A)=\dfrac{\text{Card } A}{\text{Card } B}=\boxed{\dfrac{1}{36}}$

$B=\{\ (1;2)\ ;\ (2;1)\ \}$; $P(B)=\dfrac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega}=\dfrac{2}{36}=\boxed{\dfrac{1}{18}}$

$C=\{\ (1;1)\ \}$; $P(C)=\dfrac{\text{Card } C}{\text{Card } \Omega}=\boxed{\dfrac{1}{36}}$

14

$P(A)=\dfrac{5}{18}$ $\quad P(B)=\dfrac{1}{36}$ $\quad P(C)=\dfrac{1}{6}$

Opérations

15

1- a) « Le couple a une fille unique. »
   b) « Le couple a au moins un enfant. »
   c) « Le couple n'a pas de fille. »
   d) « Le couple a un garçon unique. »

2- a) $\overline{F\cup G}$ ou $\overline{F}\cap\overline{G}$
   b) $(F\cup G)\cap\overline{E}$

3- a) Non.
   b) Oui.

16

1- a) « Il n'y a que des *pile.* »
   b) « Il n'y a que des *face.* »
   c) « Il y a au moins un *pile.* »
   d) « Il y a 2 *pile* exactement. »
   e) « Il y a 1 ou 2 *pile.* »

2- a) Oui.
   b) Non.

17

1- a) 1 million.

b) Ω est l'ensemble des couples dont les termes sont des entiers compris entre 1 et 1000.

c) $(1;2)$

d) Oui.

2- a) Les deux entiers sont égaux.

b) Le second entier est strictement inférieur au premier.

c) Les deux entiers sont différents.

d) Les deux entiers sont différents.

(Remarquons que l'égalité $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ est vraie quels que soient les ensembles A et B.)

Axiomes

18

a) 1.

b) 30%.

c) Non.

Théorèmes

19

31/32

20

a) $P(A)=3/8$

$P(B)=1/2$

$P(C)=3/16$

b) $P(D) = 11/16$

$P(E)=1/2$

21

a) 15%

b) 85%.

22

a) 4/9

b) 5/9

23

a) $P(A)=1/8$

$P(B)=1/4$

$P(C)=1/32$

b) $P(D)=11/32$

$P(E)=21/32$

24

a) $P(A)=1/6$

$P(B)=1/6$

$P(C)=1/36$

b) $D=A\cup B$ et $C = A\cap B$

$P(D) = P(A)+P(B)-P(C) = 11/36$

$E=D\setminus C$ $\quad$ $P(E)=5/18$

Simulations

25

Non corrigé : testez votre programme avec votre calculatrice.

26

Non corrigé : testez votre programme avec votre calculatrice.

27

Non corrigé : testez votre programme avec votre calculatrice.

Probabilités et dénombrement

28

1/19683.

29

1/17550.

30

a) P(A) = 1/120.

b) P(B) = 2/5.

31

45/1024.

32

2/5.

Arbres

33

3/5.

34

Oui.

35

11/18.

36

46%.

37

3/4.

38

7,85 %.

39

Corrigé partiel (il manque quatre lignes) :

```
If entAléat(1,5)≤2
Then
Disp "NOIRE"
If entAléat(1,4)≤1
Then
Disp "NOIRE"
Else
Disp "BLANCHE"
End
Else

(...)

End
End
```

Exercices supplémentaires

40

1/216

41

13/18.

42

1/24.

43

1/7.

44

Oui, le candidat a intérêt à modifier son choix en prenant l'autre porte encore fermée. Il a deux fois plus de chances de gagner (2/3 contre 1/3 s'il garde son premier choix).

Monty Hall est un canadien qui a présenté pendant 13 ans le jeu qui a inspiré ce problème.

Approfondissements

45

a) et b) Non.

c) Il ne s'agit pas de prétendre qu'il y aurait une relation de cause à effet entre le sexe du premier enfant et celui du second : le fait qu'un femme ait porté une fille ne va pas augmenter ses chances d'avoir une fille par la suite. Mais deux couples différents n'ont pas forcément la même probabilité de concevoir une garçon plutôt qu'une fille. Et si un couple a eu une fille pour premier enfant, il est un peu plus probable que ce soit un couple plus porté à concevoir des filles qu'un couple plus porté à concevoir des garçons… Donc il y a un peu plus de chances pour qu'il conçoive une fille à nouveau. Ceci étant pris en compte, la politique décrite dans cet exercice va favoriser (légèrement ?) la naissance des filles.

46

≈8,74%

47

1013/1024.

48

a) 3/4

b) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (≈ 29%)

Aide pour le b) : (d'abord, bravo d'avoir cherché cet exercice !) Noter par une inconnue la probabilité recherchée et essayer d'exprimer en fonction de celle-ci la probabilité d'en voir passer en une heure. Comme cette dernière est connue, une mise en équation est possible…

49

2/3

Aide :

Il n'est pas indispensable de se lancer dans des sommes infinies. On peut noter la probabilité recherchée par une variable et tenter de mettre en équation…

50

4 fois avec un dé, 25 fois avec deux.

Cette question des dés est l'une des deux questions du chevalier de Méré à Pascal (voir lettre de Pascal à Fermat, le 29 juillet 1654). L'autre est la « méthode des parties », que je ne traite pas en seconde. Méré était étonné qu'il n'y ait pas proportionnalité (avec une chance sur 36, il aurait envisagé 6 fois plus d'essais, donc 24 ; or c'est 25).

51

Erreur souvent constatée : 15%, vu par une majorité comme 5×(3/100). On a en effet, pour 1 ticket, 3% de chances d'avoir un lot principal… Mais attention ! Pour 2 tickets, on n'a pas 3/100+3/100. Pourquoi ? Parce que pour $P(A\cup B)$, faut soustraire l'intersection. On pourrait le faire, mais là, c'est compliqué car il y a cinq événements à « additionner », avec toute sorte d'intersections (la formule de la probabilité de l'union ne se généralise pas si simplement à l'union de plus de deux événements).

Le mieux est ici de raisonner par l'événement contraire et de compter les cas (favorables/possibles). Un peu artificiellement, on pourra considérer que les tickets sont achetés dans un certain ordre et que les numéros 1, 2 et 3 correspondent aux lots principaux. Chaque cas est alors représenté par un quintuplet, sans répétition, dont les termes sont des entiers entre 1 et 100 inclus. Par exemple (28 ; 10 ; 98 ; 54 ; 31) est un cas possible (non gagnant). Après… débrouillez vous.